アポーハ代数・アポーハ論理・アポーハ比量

上　田　　昇

1. アポーハ代数　ディグナーガは PS 第5章の要所要所で上位語・下位語（普遍語・特殊語）の関係を設定してアポーハ論を展開している．上位語・下位語の関係にある二語は互いに排除の関係にはなく（PS k.25 cd），また，下位語の artha（意味）は上位語の artha より“多い”[1]．他方，共通の上位語の下にある二つの下位語（特殊語）は互いに排除の関係にある（PS k.28ab）．また，同義語間に排除関係はない（PS k.25 cd）．

上田（2013）では，諸対象への適用の可否が決まっている一連の語からなる一つの語群を所与として，語群に基づく語のアポーハ論的意味（artha）を考えた．つまり，語 X の外延の補集合（語 X が適用できない対象の集合）の被覆を以て X の artha とするのである．ここで，対象の集合 s の被覆とは，s の少なくとも一つの要素について適用されることが適正と見なされる語の集合のことである．言い換えれば，語 X を名前として持たない諸対象が持つ名前の集合として，語 X の意味（artha）を表すのである[2]．そして，二つの語 X, Y について，X の artha が Y の artha を（集合として）含むとき，語 X が語 Y の下位語（語 Y が語 X の上位語）であると定義した．

さらに上田（2016）では，語群から作られる「アポーハ代数」を用いて論理式[3]（拡大された語）の“外延”および“意味（artha）”を定義することによって，語の意味（artha）を否定名辞や複合語に拡張した．すなわち，論理式 P について，

$$\mathrm{artha}(\mathrm{P}) = \mathrm{cov}((\mathrm{h}[\mathrm{P}])^{\mathrm{C}})$$

によって，語 P のアポーハ論的意味（artha）が与えられる[4]．（「アポーハ代数」および個々の記号の意味は拙論参照．cov は「被覆」，h[P] は語 P の“外延”，$(\mathrm{h}[\mathrm{P}])^{\mathrm{C}}$ は h[P] の補集合，をそれぞれ意味する．[P] は所与の語群から作られるアポーハ代数の要素である．）この式は，語 P が適用できない対象の集合（$(\mathrm{h}[\mathrm{P}])^{\mathrm{C}}$）の被覆を以て語 P の意味（artha）とするものである．P が否定あるいは連言を含む論理式である場合，

P の“外延”（h[P]）は古典論理学的な意味解釈（外延）とは必ずしも一致しない[5]．しかし，artha と“外延”に関して次の同値関係が成り立つ（上田2018）．

P, Q を論理式（含意記号は含まない）とするとき，

$$\mathrm{artha}(P) \supseteq \mathrm{artha}(Q) \Leftrightarrow h[P] \subseteq h[Q] \quad (P \text{ は } Q \text{ の下位語})$$

2. アポーハ論理　任意の語群の任意の語 X について，[X]⊆[nonnonX] であることはアポーハ代数の性質から容易に知られる．[X]⊆[nonnonX] より，h[X]⊆h[nonnonX]．従って artha(X)⊇artha(nonnonX)．つまり X は nonnonX の下位語である．この関係は任意の語群の任意の語 X について成り立つが，これを，p を命題変項とする論理式 p および nonnonp の p に当該の語群の語 X を代入して得られる関係と見ることができる．

一般に，次が成り立つ（証明略）．（P, Q は p, q, r, … を命題変項とする論理式．）

（＊）任意の語群の任意の語による p, q, r, … への代入で [P]⊆[Q] が成り立つことは，任意の語群の任意の語による p, q, r, … への代入で h[P]⊆h[Q] が成り立つことの必要十分条件である．（十分条件であることは明らか．必要条件であることの証明は上田2018参照．）

（＊）は，論理式 P, Q について，「任意の語群で」（下線部の簡略表現とする）[P]⊆[Q] であることは，同様に「任意の語群で」P が Q の下位語（Q は P の上位語）であることの必要十分条件であることを意味する．P, Q を論理式として，「任意の語群で」P が Q の下位語であるような対＜P, Q＞が得られる論理体系を求めたい．

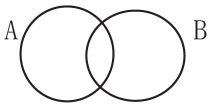
上田（2018）では，命題論理の体系として Gentzen の LK（古典論理）をとり，それに基づき二種類の論理体系 BL と AL を定義し，これらをアポーハ論理と呼んだ．詳細は拙論の参照を乞うが，式 P→Q が BL で証明可能であるなら，「任意の語群で」恒に [P]⊆[Q]（P は Q の下位語である）が成り立つ（式 P→Q の付値を $[P\to Q]=[P]^c \cup [Q]$ と定義すると，$[P\to Q]=\omega \Leftrightarrow [P]\subseteq[Q]$．ただし$\omega$は当該の語群の語すべての集合．なお $[\to Q]=[Q]$，$[P\to]=[P]^c$ とする．式→は LK の無矛盾性により証明図に現れない）．このとき，式 P→Q を恒等的と呼ぶ．一方，AL で証明可能な式 P→Q は必ずしも恒等的ではない．しかし，語群を次に定義するもの（AL 語群）に限定するなら，AL で証明可能な式 P→Q は「任意の AL 語群で」恒に [P]⊆[Q] である．これを AL 恒等的と呼ぶ．

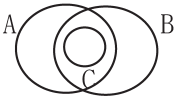
AL 語群：

語群における任意の二つの語 A,B∈ωについて，$[A\wedge B]=[A]\cap[B]=\phi$ ならば，[A]⊆[nonB]（および [B]⊆[nonA]）が成り立つ．

下線部は当該の語群において，A,B の外延が次の左図のようなオイラー図で表せるとき，必ず $[A\wedge B]=[A]\cap[B]\neq\phi$ であること，言い換えれば，語 C∈ωが存

在して，M(C)⊆M(A)∩M(B)―――語 X の外延を M(X) で表す―――であることを意味する（右図）．





任意の語群は語を適宜追加して AL 語群にすることができることは明らかである．上の左のオイラー図で言えば，M(A)∩M(B) に含まれる対象の一部あるいは全部を外延に持つ新たな語を C としてωに追加することができる．「青」の外延と「蓮華」の外延の共通部分を「青蓮華」と呼ぶ如くである．

AL 語群では，論理式（拡大された語）P, Q について，[P∧Q]＝[P]∩[Q]＝ϕ ならば，[Q]⊆[nonP]（および [P]⊆[nonQ]）が成り立つことが容易に分かる．

次の結果が得られる．P,Q を論理式として，式 P→Q について下図の含意関係（→で表す）が成り立つ（右向き及び下向きの矢印で示される含意関係の証明は容易あるいは自明）．従って，恒等的な式は悉く AL で証明可能である．

BL で証明可能　→　恒等的
　　↓　　↓
AL で証明可能　⇄　AL 恒等的

さらに，AL で証明可能な式 P→Q は，直観主義命題論理（LJ）から含意に関する規則を除いた体系で証明可能であり，その逆も成り立つ．すなわち，P が Q の下位語であるような論理式の対＜P, Q＞の集合は AL, LJ（含意を除く）のいずれによるも同一である．なお BL によって証明可能な式の集合は AL によって証明可能な式の集合に含まれ，さらに後者は LK によって証明可能な式（トートロジー）の集合に含まれる（詳細は上田2018参照）．

3. アポーハ比量　言語による知を比量知であるとするディグナーガは比量を「他の排除」による知の確定と見る．例えば，煙は非火の単なる排除（anagni-nivṛtti-mātra）を知らしめる（PS Chapter2, p. 47, l.13）．煙によって知られるのは「ここに火こそがある，〔すなわち〕非火があるのではない agnir evātra nānagnir」ことである（PS Chapter2, p. 50, l.1）．また，ディグナーガは喩のうち異喩すなわち vyatireka を比量の主役に据えていると考えられる[6)]．

いま，ダルマ y をダルミン x が有することを命題 A(y, x) で表す．するとディグナーガの考える比量の基本形は次のように表すことができるであろう．(p: パクシャ，s: 所立法，h: 論証因．異喩は全称化しておく．)

（宗 1）nonA(nons, p)；(因) A(h, p)；(異喩) ∀ z(nonA(s, z) ならば nonA(h, z))．

しかしディグナーガの場合，パクシャ p は変項 z の対象領域には含まれない（外遍充論）．それにもかかわらず，「nonA(s, p) ならば nonA(h, p)」――これも vyatireka と呼ぶことにする――に基づいて推論が行われると考えられる．

いま，上の宗 1 を non(nonA(s, p))（略記して nonnonA(s, p)）に替えて次の三支作法を作る．

（宗 2）nonnon A(s, p)；(因) A(h, p)；(vyatireka) nonA(s, p) ならば nonA(h, p)．

この vyatireka を Gentzen の式(sequent) の表記法を用いて，(P = A(s, p)，Q = A(h, p) と置いて)

（宗）nonnonP；(因) Q；(vyatireka) nonP→nonQ

と表す．これをアポーハ比量と呼ぶ．

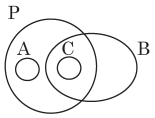
ここで，Q と nonP→nonQ から nonnonP がアポーハ論理のうち BL で証明できる．証明図は次のように書ける．

$$\dfrac{\dfrac{}{\text{nonP}\rightarrow\text{nonQ}}}{\dfrac{\rightarrow\text{Q}\quad\text{Q}\rightarrow\text{nonnonP}}{\rightarrow\ \text{nonnonP}}}$$

しかし，Q(因) と nonP→nonQ(vyatireka) から P をアポーハ論理で証明することはできない[7]．なぜなら，次に示す語群（AL 語群）から作られるアポーハ代数上の付値は，[→Q] = ω かつ [nonP→nonQ] = ω かつ [→P] ≠ ω となるからである．

語群 < ω, U > について，ω = {P, A, B, C}，U = {u_1, u_2, u_3} とする（ω は語の集合，U は対象の集合）．

	u_1	u_2	u_3
P	○	○	×
A	○	×	×
B	×	○	○
C	×	○	×



ここで Q = P∨B と置くと，[P] = {P, A, C}，[Q] = ω, [nonP] = ϕ, [nonQ] = ϕ となるから，[→Q] = ω かつ [nonP→nonQ] = ω かつ [→P] ≠ ω である．

[→Q] = ω かつ [nonP→nonQ] = ω であるから，もし Q と nonP→nonQ から P が

アポーハ論理（AL）で証明可能ならば，この語群が AL 語群であることを考慮すれば，[→P]＝ωでなければならず（上田2018），矛盾に陥る．（P→nonnonP が BL で証明できるから nonnonP は主張としては P より“弱い”あるいは“緩い”.）

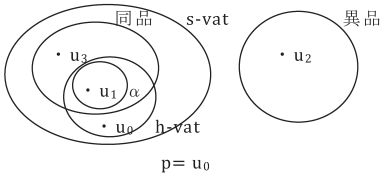
ディグナーガのアポーハ比量においては，パクシャ p について vyatireka が成立しない場合があり得るので（外遍充論），宗 nonnon A(s, p) は真であるとは限らない．どのような場合に vyatireka が成立して真なる宗がアポーハ論理で証明できるであろうか.

一般に語群＜ω, U＞を所与として，ωの要素（命題変項）から構成される論理式を R とするとき，対象 z について「z は名前 R を有する」ことを A(“R”, z) で表し，その真理条件を「z は”R”の“外延”に含まれる」こと，すなわち z∈h[R] とする．そして「A(y, x)→A(“y-vat”, x) かつ A(“y-vat”, x)→A(y, x)」が成り立つものとし，これを A(y, x)⇆A(“y-vat”, x) と書く.

いま，パクシャ p, 所立法 s, 論証因 h に関連して次の二つの語群＜ω_1, U_1＞，＜ω_2, U_2＞, を考える．ω_1＝{s-vat, 同品，異品，h-vat, α}，U_1＝{u_0, u_1, u_2, u_3} ここで p＝u_0．ω_2＝ω_1，U_2＝{u_1, u_2, u_3, u_4} ここで p＝u_4．各語の外延は下の表およびオイラー図のようであるとする（図は h が九句因の第八因のケースである．U_1 あるいは U_2 から対象 u_3 を削除すれば第二因になる）．容易に確認できるように，これらの語群においては任意の語 x, y∈ωについて h[x∧y]＝h([x]∩[y])＝h[x]∩h[y]（従って任意の論理式 P, Q について h[P∧Q]＝h([P]∩[Q])＝h[P]∩h[Q]）が成り立つ).

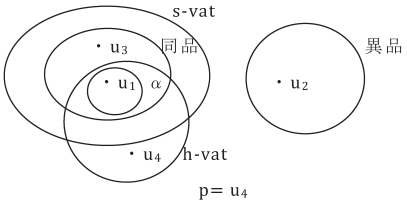
ここで z を対象の一つとして語（論理式）P に命題 A(“P”, z) を対応させ，論理記号を次のように定義する．A(“P”, z)∧A(“Q”, z):＝A(“P∧Q”, z)，A(“P”, z)∨A(“Q”, z):＝A(“P∨Q”, z)，nonA(“R”, z):＝A(“nonR”, z)．式 P_1, P_2, …→Q_1, Q_2, … には A(“P_1”, z)，A(“P_2”, z)，…→A(“Q_1”, z)，A(“Q_2”, z)，… を対応させる．（BL あるいは AL における推論規則に現れる命題 P を A(“P”, z) に置き換えて得られる推論規則の妥当性（validity）―真なる諸前提から導かれる結論が真であること―は波線の条件により保証される[8].）

＜ω_1, U_1＞	u_0	u_1	u_2	u_3
s-vat	○	○	×	○
同品	×	○	×	○
異品	×	×	○	×
h-vat	○	○	×	×
α	×	○	×	×



（語αは波線の条件を満たすために補われる．αは「同品かつ h-vat」（宗同品かつ因同品）の意味を持つ．）

$<\omega_2, U_2>$	u_1	u_2	u_3	u_4
s-vat	○	×	○	×
同品	○	×	○	×
異品	×	○	×	×
h-vat	○	×	×	○
α	○	×	×	×



（「同品」の外延と"s-vat"の外延は等しい。）

これらの語群から得られるいずれのアポーハ代数においても［non(s-vat)］=［異品］．従って，任意の対象 z について A(“non(s-vat)”, z)⇆A(“異品”, z)．いま因の第三相（vyatireka）を

$\forall z \in Ui$ について，A(“異品”, z)→nonA(h, z)　　(i = 1 あるいは 2)

で表す．そして，p をパクシャとする次のアポーハ比量を考える（$p = u_0$, あるいは $p = u_4$）．

（宗）nonnonA(s, p)；（因）A(h, p)；（vyatireka）A(“異品”, p)→nonA(h, p)．

これは次の比量と同等である．

（宗）nonnonA(“s-vat”, p)；（因）A(“h-vat”, p)；（vyatireka）A(“異品”, p)
→non A(“h-vat”, p)．

A(“non(s-vat)”, p)⇆A(“異品”, p) より，この最後の vyatireka は A(“non(s-vat)”, p)→nonA(“h-vat”, p) に置き換え得る．ここから次の証明が BL で可能である．

$$\frac{\dfrac{}{A(\text{“non(s-vat)”}, p) \rightarrow \text{non } A(\text{“h-vat”}, p)} \qquad A(\text{“h-vat”}, p) \rightarrow \text{nonA}(\text{“non(s-vat)”}, p)}{\rightarrow \text{nonA}(\text{“non(s-vat)”}, p)}$$

このように，因と vyatireka から nonA(“non(s-vat)”, p) がアポーハ論理で証明できる．そして，nonA(“non(s-vat)”, p)⇆nonnonA(“s-vat”, p) より，nonnonA(“s-vat”, p) が証明できる（p∈h[“nonnon(s-vat)”] であるから nonnonA(“s-vat”, p) は真）．これに対し，すでに見たように，A(“s-vat”, p) つまり A(s, p) は $p = u_0$ の場合，真であるにもかかわらずアポーハ論理で証明することはできない．反対に $p = u_4$ の場合 A(s, p) は偽であるが，その二重否定命題 nonnonA(s, p) はアポーハ論理で証明可能であり真である．

ここで s＝火，h＝煙とおけば，nonnonA(“火-vat”, p) すなわち nonA(“non(火-vat)”p)

が証明できる．さらに，もし［異品］=［non 火-vat］となる語 “non 火-vat” が語群に存在するなら[9]，［non（火-vat）］=［non 火-vat］となる（∵［non（火-vat）］=［異品］）．このとき，nonA(“non(火-vat)”, p)⇆nonA(“non 火-vat”, p) であるから，nonA(“non 火-vat”, p) すなわち宗1 nonA(non火, p) が証明できる．

このように所謂外遍充論たるディグナーガの比量は，いくつかの条件の下で，パクシャについて vyatireka が成り立ち，宗1を論証（演繹）できる．

---

[1] PS k.29 cd の自注．Cf. 上田2013.

[2] 外延の単なる補集合は名称（種名）を問われない対象の集まりであるが，それをディグナーガが語の artha とすることができたであろうか．疑問に思う．

[3] 命題論理学における論理式．ただし論理式に現れる論理記号は選言（∨），連言（∧），否定（non）に限定する．

[4] 上田（2016）では論理式 P の artha として，本稿における定義の他に，対象領域における補集合操作を避けた定義を挙げ，それを基本的としたが，今は分かりやすさを優先させた定義に拠る．

[5] 詳細は上田2015に譲るが，例えば否定名辞 nonP の外延（h[nonP]）は P の外延（h[P]）と交わらないが，h[P] の補集合に一致するとは限らない．

[6] Jinendrabuddhi は vyatireka の主要性（pradhānyam）および anvaya の非主要性を述べている．PS Chapter 2, p. 47, l.16–19.

[7] 本文に引用した ”agnir evātra nānagnir” からは，ディグナーガが nonnonP→P を認める（従って→P が証明可能であると認める）可能性は否定されないであろう．

[8] A(“P_1”, z)，A(“P_2”, z)，…→A(“Q_1”, z)，A(“Q_2”, z)，… の真偽を A(“P_1”, z)∧A(“P_2”, z)∧…→A(“Q_1”, z)∨A(“Q_2”, z)∨… なる式の真理値と定義し，式の真理値については，真→偽，および真→　の場合のみ偽，他の場合は真と定義する．詳細は別稿「アポーハ論と二重否定」『目白大学人文学研究』15（予定）に譲る．

[9] ここでの異品概念はディグナーガの異品概念より “狭い”．ディグナーガの異品概念については上田（2001, p. 83–85）参照．

〈略号〉

PS （『集量論』）=*Pramāṇasamuccaya*: Ole H. Pind, *Dignāga's Philosophy of Language, Pramāṇasamuccayavṛtti V on anyāpoha*, part 2, Österreichische Akademie der Wissenschaften, 2015. PS Chapter 2=H. Lasic, H. Krasser, E. Steinkellner, *Jinendrabuddhi's Viśālāmalavatī Pramāṇasamuccayaṭīkā* Chapter 2, Austrian Academy of Sciences, 2012.

〈参考文献〉

上田昇 2001『ディグナーガ，論理学とアポーハ論』山喜房仏書林．　――― **2013**「アポーハ論的「排除」について」『印仏研』62(1): (89)–(96)．　――― **2015**「論議領域とアポーハ代数――否定名辞の外延的意味――」『目白大学人文学研究』11: 1–16.　――― **2016**「アポーハ論と名辞――否定名辞・複合語――」『印仏研』64(2): (111)–(118)．　――― **2018**「アポーハ論理について――“AL 完全性 ” の証明――」『目白大学人文学研究』14: 161–184.　**小野寛晰 1994**『情報科学における論理』日本評論社.

〈キーワード〉 外遍充，二重否定，vyatireka

（目白大学教授，博士（文学））