

Mānavaśulbasūtra 3. 2. 9-10 (円の正方形化)

林 隆 夫

1. はじめに

通常 śrautasūtras の一部あるいは補遺をなす śulbasūtras (編纂は紀元前 6 世紀以降) は, śrauta 祭式の祭場設営に必要な数学的知識 (特に幾何学的知識) を多く含んでおり, 数学書ではないが, 同時代の数学書の現存しないインド古代の数学の歴史を構築する上で重要な資料である。主要な śulbasūtras として, Āpastamba- (A で略記), Baudhāyana- (B), Kātyāyana- (K), Mānava- (M), の 4 つが知られている。このうち最初の 3 つは 19 世紀後半から 20 世紀前半にかけて, Thibaut [1874/77; 1875; 1882], Bürk [1901/02], Caland [1904/23], Datta [1932], Nene & Dogre [1936], 等によりサンスクリットテキストや研究が出版され, 数学史に貴重な情報を提供してきたが, 最後の Mānavaśulbasūtra は, Mazumdar [1922] や Datta [1932] が写本についての報告や内容の要約, 部分的研究などを公表していたものの, van Gelder [1961/63] が Mānavaśrautasūtra の校訂テキスト (śulba は同書の第 10 巻) と英訳を出版するまでは, 数学史家のよく利用するところではなかった。したがって, Mānavaśulbasūtra に関するわれわれの現在の知識はほとんど van Gelder に負っているといっても過言ではなく, Seidenberg [1978], Michaels [1978], Kulkarni [1983], などの śulba 研究は, Mānava に関する限り専ら彼女のテキストと英訳に依拠している。

しかし, 少なくとも数学的観点から見ると, 彼女の英訳は十分とはいえない面があり, また既に指摘されているように [井符 1980, 386], そのテキストにも問題が無くはないように見受けられる。この小論では, 円と正方形との間の等面積変換規則を述べる一節 [M 3. 2. 9-10] を取り上げ, 新しい解釈を提案したい。

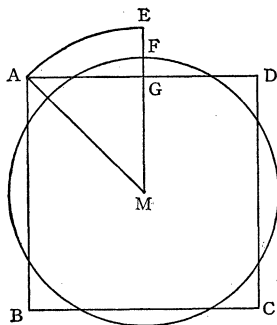
まず, 同じ問題は Mānava 以外の śulbasūtras でも取り扱われているので, それらを見ておこう。与えられた正方形を等面積の円に変換する方法は [A 3.2-5], [B 1.58], [K 3.13] に共通しており, 例えば [A 3.2-5] は次のように述べる (図 1 参照)。

(24)

Mānavaśulbasūtra 3.2.9-10 (円の正方形化) (林)

四角形 (正方形: ABCD) を〈等面積の〉円形に作るうとする場合、〈正方形の〉中心 (M) から頂点〈の一つ〉に〈綱を〉のばすべし。〈M点を中心として、この綱で〉側辺方向に円を描き、〈Mから辺ADに垂線を下ろし、ADとの交点をG、この垂線の延長線が円弧と交わる点をEとし、線分MEの、正方形の外にある〉超過部分 (GE) の三分の一 (GF) を〈MGに〉加えて、〈Mを中心に半径MFの〉円を描くべし。それ (以上の手続きで作図された図形面積) は〈所与の正方形面積と〉不変であり、円形〈である〉。〈所与の正方形とこの円とを比べて、正方形から〉失われた〈部分の面積〉は、ちょうど〈正方形の外側にある〉付加〈部分の面積〉にあたる。

(井狩沢 [1980, 401-402])



(図1)

ここで、与えられた正方形の一边を a 、求める円の直径を d とすると、この規則は現代的表記法を用いて、代数的に、

$$\frac{d}{2} = \frac{a}{2} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{a}{2} \right) \quad (1)$$

と表すことができる。

逆向きの変換規則、すなわち与えられた円を等面積の正方形に変換する方法は、Mānava 以外では2つ知られている。その一つは [A 3.6-8], [B 1.60], [K 3.14] に共通しており、

$$a = d - 2 \cdot \frac{d}{15} = 13 \cdot \frac{d}{15} \quad (2)$$

と表すことができる。もう一つは [B 1.59] だけに述べられているもので、

$$a = d - \frac{d}{8} \cdot \frac{28}{29} - \left(\frac{d}{8} \cdot \frac{1}{29} \cdot \frac{1}{6} - \frac{d}{8} \cdot \frac{1}{29} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} \right) \quad (3)$$

と表すことができる。この(3)が(1)から算術的に導かれた可能性は Thibaut [1875, 27-28] 等が指摘しているが ([Datta 1932, 140-151; Seidenberg 1962, 515-517; Kulkarni 1983, 113-116] も参照), さらに, (1)と(2)だけが3つの śulba に共通することから考えて, (これも指摘されているように [矢野 1980, 96]), (3)は後で付加された可能性もある。

ところで今, 等式, $a^2 = p(d/2)^2$, を仮定し, 誤差 e を, $e = 100 \cdot (p - \pi)/\pi$ (%), で定義すれば,

$$(1)から: p = 9(6 - 4\sqrt{2}) \simeq 3.0883, e \simeq -1.696 \%$$

$$(2)から: p = 4(13/15)^2 \simeq 3.0044, e \simeq -4.367 \%$$

$$(3)から: p = 4(9785/11136)^2 \simeq 3.0883, e \simeq -1.696 \%$$

を得る。これらの数値はそれぞれの公式の精度を示す指標と見なすことができる (p が π に近いほど, すなわち e の絶対値が小さいほど, 精度がよい)。ただし, これを根拠に, 「śulbasūtras で用いられた π の値は 3.0883, または 3.0044 (または四捨五入して 3), である」というのは見当違いである。というのは, 円の面積 (A) が半径 (または直径) の平方に比例するという認識, $A = \pi(d/2)^2$, が śulba の時代にあったという保証はないからである。

さて, van Gelder の英訳によれば, Mānavaśulbasūtra には正方形から円への等面積変換規則 2 種 [M 1. 1. 8, 3. 2. 10; 3. 2. 15] と逆向きの変換規則 1 つ [M 3. 2. 13] が述べられている。しかしテキストを子細に読むと, [M 3. 2. 13] は実は変換規則ではなく円周の計算法であり, 逆に [M 3. 2. 10] は, 正方形→円, だけでなく, 円→正方形, の変換規則をも含んでいることがわかる。前者は既に Sen & Bag [1983, 278] によって訂正されているので, ここでは後者を示そう。

2. Mānavaśulbasūtra 3. 2. 9-10

Text (van Gelder's edition)

[M 3. 2. 9] maṇḍalam atha caturasraṃ maṇḍalaṃ ca yaḥ kuryāt
tasyemaṃ karaṇavidhiṃ tadvidāṃ udāhṛtāṃ śṛṇuta/

[M 3. 2. 10] maṇḍalaviṣkambhasamas tribhujād avalambakaś catuḥsraktiḥ
prāgāyatāt tribhāgāt karṇāt sa maṇḍalaṃ bhavati/

Translation by van Gelder

[M 3. 2. 9] If one wishes to turn a square into a circle or to make a circle,
listen to the prescriptions for the making given by informed per-

sons.

[M 3. 2. 10] A square, (whose diagonal) is equal to the diameter of a circle, that forms a sector by directing (half of the diameter) eastward, becomes a circle by the hypotenuse (i. e. half of the diameter), but with (only) the third part (of what now lies outside the square; thus the radius of the circle, that has the same surface as the square, is found).

このように, van Gelder によれば [M 3.2.10] が与えるのは(1)と同じ規則(図1参照)のみである。Sen & Bag [1983, 135] は独自の訳を与えるが, 規則(1)のみを認める点では van Gelder と変わらない。一方 Gupta [1988, 116] は [M 3.2.10] に触れてサンスクリット表現の不鮮明さを指摘するが, やはり(1)の規則のみを認めている。

確かにこの一節にはいくつかの文法的問題がある, 特に [M 3.2.9] では, *atha* の位置, *ca* の価値, *yaḥ kuryāt tasya ... śṛṇuta* の関係, *udāhṛtām* に修飾される語, など不明瞭な点が多い。しかしここでは文法的問題には立ち入らず, 関係詞節(副文)中に現れる3つの語, *maṇḍalam* (円), *caturasram* (正方形), *maṇḍalam* (円), とその順序のみに注目したい。これを素直に見れば, ここで主語が「為さん」(*kuryāt*)としているのは, 「円を[正方形に], そして正方形を円に」(*maṇḍalam [caturasram] atha caturasram maṇḍalam ca*) することであろう。そして実際, [M 3.2.10] では, 2つの規則が正にこの順序で与えられている。

[M 3.2.10] 円の直径に等しい三辺形からの垂線が四辺形である。東に伸ばされた三分の一をもつ耳(対角線)によって, それ(正方形)は円になる。

これは原文に即した自然な読みであり, [M 3.2.9] より問題は少ない。ただし, *-samas tribhujād* を *-samatribhujād* と読む(同様の訂正を van Gelder も行っている。例えば [M 1.1.8])。また *sa* を *sā* と読む。

この [M 3.2.10] の後半は, 表現が曖昧であるが, 他の *śulbasūtras* の表現に照らしてみれば, 規則(1)を述べていると考えられる。一方前半は, 少し舌足らずだが, その意味は明瞭である。すなわち円が与えられたとき(図2), まずその直径($AB=d$)を一边とする正三角形(ABC)を描き, 次にその垂線(CO)を一边(a)とする正方形($OCDE$)を描けば, 円→正方形の等面積変換ができるという

ことを述べている。この方法に従えば,

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} d \quad (4)$$

という関係があるが, 前と同様, $a^2 = p(d/2)^2$, を仮定すれば,

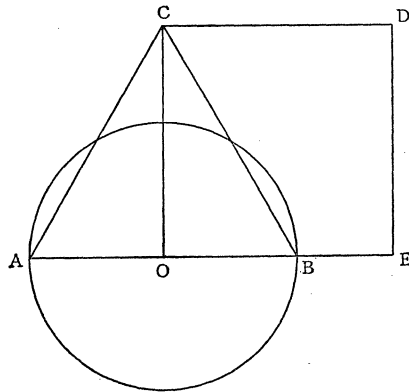
$$(4) \text{ から: } p = 3, \quad e \simeq -4.510 \%$$

であり, この精度は, (1), (2), (3), の規則と比較しても遜色ない。またこの方法が必要とする作図の知識は,

- (i) 与えられた長さ(d)を一辺とする正三角形を描くこと,
- (ii) 与えられた直線に対して, その上にない点から垂線を引くこと,
- (iii) 与えられた長さ(a)を一辺とする正方形を描くこと,

の3つであるが, これらはいずれも śulbasūtras ではよく知られている [Datta 1932, 52-70; Sarasvati 1979, 22-33]。

以上から, この解釈は妥当と思われる。(2)と(3)の方法が, 幾何学的な表現をとってはいるが, 実際は算術的なのに対して, (4)の方法はあくまで幾何学的なところに特徴がある。また, 作図の単純さ・容易さにもかかわらず精度は悪くない。この美しい方法がどのようにして得られたかは, まだ不明である。



(図2)

文 献

- Bürk, A. (ed) [1901/02] Das Āpastamaba-Śulba-Sūtram. *ZDMG* 55 und 56.
- Caland, W. (ed) [1904/23] *The Baudhāyana Śrauta Sūtra belonging to the Taittirīya Saṃhitā*. Calcutta.
- Datta, B. [1932] *The Science of the Śulba*. Calcutta.
- Gupta, R.C. [1988] New Indian Values of π from the Mānava Śulba Sūtra. *Centaurus* 31, 114-126.
- 井狩弥介 (訳) [1980] アーバスタンバ・シュルバーストラ. 矢野道雄編『インド天文学・数学集』(朝日出版社), 373-488.
- Kulkarni, R.P. [1983] *Geometry according to Śulba Sūtra*. Pune.
- Mazumdar, N.K. [1922] Mānava Śulba Sūtram. *JDL/UC* 8, 327-342.
- Michaels, A. [1978] *Beweisverfahren in der vedischen Sakralgeometrie*. Wiesbaden.
- Nene, G.S. & A.S. Dogre (eds) [1936] *The Katyāyana Śulbasātra*. Benares.
- Sarasvati Amma, T.A. [1979] *Geometry in Ancient & Medieval India*. Delhi.
- Seidenberg, A. [1962] The Ritual Origin of Geometry. *AHES* 1, 488-527.
- [1978] The Origin of Mathematics. *AHES* 18, 301-342.
- Sen, S.N. & A.K. Bag [1983] *The Śulbasātras of Baudhāyana, Āpastamba, Katyāyana and Manava with Text, English Translation and Commentary*. New Delhi.
- Thibaut, G. [1874/77] The Sulvasutra of Baudhāyana with the Commentary of Dvārakānāthayajvan. *The Pandit* 9-10 & NS 1.
- [1875] *The Śulvasātras*. Originally published in *JASB* NS 44, 227-275. Calcutta.
- [1882] Katyāyana Śulbapariśiṣṭa, with the Commentary of Rāma, son of Sūryadāsa. *The Pandit* NS 4.
- Van Gelder, J.M. [1961/63] *The Mānava Śrautasātra*. 2 vols. New Delhi.
- 矢野道雄 [1980] Śulbasūtra と Gaṇitaśāstra との関係. 『印度学仏教学研究』28, 2, 93-96.

<キーワード> シュルバーストラ, 数学史, 幾何学

(同志社大学助教授)