無限、存在、他者

——清沢満之と集合論——

落合仁司

〈論文要旨〉　宗教の根本的な対象である神あるいは仏は伝統的に無限なるものと捉えられて来た。この神あるいは仏の無限を数学的な集合論における無限と捉え直すことによる帰結を解析する、それが宗教解析である。宗教解析において清沢満之の宗教哲学は避けて通れない。清沢は神あるいは仏を無限、われわれ人間を有限と捉えることにより、自力と他力の宗教の差異を鮮やかに浮び上がらせた。本論は清沢の無限、自力、他力等の概念を再構成し、それらを集合論における超限順序数、極限順序数、有限順序数の補集合等によって表現し、その帰結を解析する。結果として神あるいは仏の完備性（completeness）及び自力と他力の等濃性（equipotency）が導かれる。

〈キーワード〉　無限、存在、他者、清沢満之、集合論

序論　「宗教の数理解析」以後の展開

「宗教の数理解析」とは、宗教の根本的な対象である神あるいは仏が、何ものとしても限定されえないもの、無限なるものであり、かつ完全なるもの、完結したもの、言い換えれば全体なるものとして伝統的に思念されてきた歴史を踏まえ、この無限の全体である神あるいは仏を、数学の集合論における無限の全体としての無限集合によって表現することが何を帰結するかを解析しようとする試みである。すなわち「宗教の数理解析」とは、無限や全体

それ自体はもとより、無限の全体である存在あるいは無、無限の部分である他者、無限の全体の自己限定等、宗教哲学に不可欠な形而上学的諸概念を、集合論における無限集合やその部分集合あるいは上限等の諸概念によって表現し、従来の哲学的思弁によっては必ずしも到達しえなかったその宗教的な含意を論理的に導出しようとする試みである。本誌掲載の拙論「宗教の数理解析」にこの試みの歴史的な系譜を含むさらに詳しい説明がある。[1] 前論文執筆以後二つの大きな展開があった。

一つ目の展開は、清沢満之の宗教哲学との出会いである。清沢満之は、言うまでもなく、十九世紀末の日本にあって浄土真宗の近代教学を打ち立てた仏僧である。彼の宗教哲学の歴史的な先駆性と世界的な普遍性にわれわれの眼が開かれたのは、彼の没後百年前後に相次いで公刊された大谷大学、藤田正勝、末木文美士らによるテクストの再刊、読み直し、再評価によるところが大きい。[2]

清沢の宗教哲学は、一言で言えば、われわれ存在者は有限であり、神あるいは仏は無限であって、自力と他力の差異に見られる宗教的伝統の差異は、有限が無限の内部に有ると捉えるか外部に有ると捉えるかの差異によるというものである。[3] このことは前論文が清沢を全く知らないで行った類別とほとんどいたるところ重なり合う。[4] よく読み較べて戴ければ剽窃でないことは明らかであるとは思うが、いずれにせよ百年以上も前に清沢によって過不足なく言い切られていることなのであるから、彼を参照すべきであろう。

さらに清沢の宗教哲学は、集合論との接合に極めて優れている。清沢の構成する有限、無限、自力、他力の概念は、あたかも集合論によって表現されることを予想していたかのようである。なるほどデデキントやカントルによる集合論の形成は十九世紀末であるから、時代的には清沢がドイツの数学学術誌に掲載された集合論の誕生を告げ

る一連の論文を読むことは可能であったかも知れない。しかし清沢が集合論を知っていたという形跡は見当たらない。たとえ論理的には読む可能性があったとしても、当時のヨーロッパの数学者にさえ理解が困難であった集合論を清沢が読んだ可能性は極めて低い。それにも関わらず清沢の無限論は、無限を数学的に取り扱いうる人類始めての方法である集合論に著しく適合的なのである。清沢の宗教哲学は数理解析されることを待ち受けていると言えよう。

二つ目の展開は、前論文が集合論の二つの柱の一方である基数論あるいは濃度論によって宗教を解析する地平に留まっていたのに対して、それ以後集合論のもう一方の柱である順序数論によって宗教を解析する地平が切り開かれたことである。集合論の中でも基数論は直観的に理解し易く宗教の解析にも見通しがよいのであるが、結局のところ、無限集合相互の関係、すなわち神あるいは仏相互の関係の解析に留まらざるをえない。

これに対して順序数論は日本における集合論の研究を先導して来た倉田令二朗も言うように「順序数論からプロの公理論的集合論が始まると考えてよい[5]」。順序数論はもとより集合論の創始者ゲオルグ・カントルに端を発するのであるが、現代の順序数論はカントルのそれを受け継ぎつつも、カントルの盟友として共に数学的無限論におけ る革命を遂行したリヒャルト・デデキントの実数論及び自然数論の系譜を色濃く継承している。このことに思いが至った時、順序数論は霧の中からその全貌を顕わにした。デデキントの実数論が自然数（有限順序数）の比である有理数の切断から実数（超限順序数）を構成して見せることによって有限と無限の関係を明らかにしたように、順序数論は無限相互の関係を解析するのみならず、無限と有限の関係、すなわち神あるいは仏とわれわれ人間との関係を解析する数学なのである。宗教の解析は順序数論を待っていたと言えよう。

以上二つの展開が、本論を執筆する動機である。

一　無限、存在、他者

存在、無、存在者、他者、有限、無限といった基本概念は前論文と大きく変わるところはない。いずれもヘーゲルの『大論理学』から抽出し、拙論で使い易いように加工された概念である。[6] 議論に必要な範囲で簡単に説明しておこう。

存在（The Being）とは、端的に「有る」あるいは「在る」ことそれ自体であり、何ものかとして限定されて有るわれわれ存在者（something）と区別される。したがって存在は何ものとしても限定されえないという意味において無限定であり、無限（The Infinite）である。この無限な存在、無限定な「有る」が何ものかとして限定されることによって、何ものかとして有る者（something）、何ものかとして存在する者、存在者が存在するのである。このことを存在者は無限な存在の限定されたすなわち有限（finite）な部分であると言ってもよいし、あるいは存在者は無限な存在を分与（impart）されていると言ってもよい。有限な存在者は差し当たり無限な存在の内部に有る。

無（nothing）は存在の否定であるが、存在は無限、無限定なのであるから、無は存在から区別されえない。何故ならあるものはその否定から区別されることによってそのものとして限定されるのであって、存在が無限、無限定である以上、その否定である無は存在から区別されえないのである。このように存在から区別されえない無を絶対無、逆に無から区別されえない存在を絶対有と呼ぶのが、いわゆる「京都学派」の伝統である。[7] この伝統に従って差し支えはないのであるが、この伝統の持つ神秘主義臭が鼻に衝く人々にとってはこう考えたらどうだろうか。存

在を全体集合とすれば、その否定である無は空集合である。無は空である。空集合は全体集合に部分集合として含まれる。存在は無を内包する。悪くないと思うがどうだろうか。

存在者は、何ものかとして限定された有限な存在、有る者なのであるから、そのもので無い者、その否定、その外部、すなわちその他者（The Other）を有する。存在者はその他者から区別されることによって限定されるのである。このような他者はついに何ものでもありえない。何故なら他者が何ものかとして限定されたとするならば、その他者の他者が存在することになり無限遡行に陥るからである。したがって他者は無限である他はない。存在者は無限な存在の有限な部分であった。このとき他者は無限な存在から存在者である有限な部分を差し引いた残余、無限な存在の無限な部分であることになる。無限な他者といえども無限な存在の部分なのである。このことを存在者は無限な他者をその外部に有すると言ってもよいし、あるいは存在者は無限な他者に臨在（presence）されていると言ってもよい。われわれ有限な存在者は、無限な存在の内部に包まれて有ると同時に、無限な他者の外部に接して有るのである。

有限な存在者と無限な存在あるいは他者との対比が、宗教を哲学言語によって表現するに当たっていかにも適切な言葉でありそうなことは予感されよう。この宗教を哲学言語によって表現する試みは清沢満之の宗教哲学を読み解く作業を通じて次節で行う。しかし有限な存在者と無限な存在あるいは他者との対比は宗教の哲学的表現に適切なだけではない。何故なら有限と無限の対比こそ、集合論分けても順序数論がその真価を発揮する場面に他ならないからである。集合論分けても本論が始めて導入する順序数論による宗教の数学的表現、宗教の解析は次々節以降で行おう。

二 清沢満之の宗教哲学

清沢満之の無限論は、ヘーゲルの無限論から抽出した前節の無限論の地平においてよく理解できる。藤田正勝による現代語訳『宗教哲学骸骨』から引用しよう。

有限・無限 いま、この二つのものの性質について簡単に概説したいと思います。万物万化と言われるものは、みな有限です。なぜかと言うと、それにはあれとこれとのあいだに相異があり、甲と乙とのあいだに区別があるために、まさに万物万化と言われるのであり、もしその区別がなければ万物万化と言うことができないからです。そしてその区別があるのはほかでもなく、あれとこれ、甲と乙とのあいだに限界があるからです。しかしこの万物万化こそ、唯一の無限でもあります。なぜなら万物万化は存在するものの全体を包括するものであり、それを外から限界づけるものが一つもないからです。(8)

それぞれに区別される個々別々の存在者としての「万物万化」は有限である。しかし全ての存在者を包括する全体としての「万物万化」は無限である。この全体としての「万物万化」こそ、前節に述べた存在に他ならない。続けよう。

依存・独立 有限にはその外に別の有限があり、二つのものが互いに互いを限界づけています。甲が有限であるのは、乙が甲を限界づけているからです。また乙が有限であるのは、甲が乙を限界づけているからです。つまり甲は乙に依拠し、乙は甲に依拠しています。これが依存ということです。このような有限は、どれほど多くあったとしても、みなそれぞれ依存性を免れることができません。

しかし有限の全体、すなわち無限はどうかと言えば、それはすでに全体ですから、その外に依拠すべき一物もありません。したがってその本質は依存にではなく、独立にあります。つまり有限は依存であり、無限は独立です(9)。

有限な存在者を限界付けるその他者は、もちろん有限な存在者でもありうるが、前節で述べたように究極的には無限な他者である。清沢も後でこのことに気付くが、いずれにせよ有限な存在者は他者に依存している。しかし有限の全体としての無限、すなわち無限な存在はその外部を持たないので何ものにも依存せず独立である。

絶対・相対　有限・依存はつねに、あれとこれ、甲と乙とが相対して存在するものですから、これを相対と言います。これに対して、無限・独立は、他に相対すべきものがないために、これを絶対と言います(10)。

有限な存在者は相対、無限な存在は絶対である。

唯一・多数　無限はその外に一物もないために、唯一です。有限は甲と乙、あるいはあれとこれがあるために多数です。ここでとくに注記する必要があるのは、多数の有限それぞれは単一であるとしても、それは単一であって、唯一ではないという点です。多数の単一が互いに集まることによって唯一をなすのです(11)。

デデキント、カントル以降の数学的無限論から見れば、無限は唯一ではない。無限は無限に有る。しかし清沢はここで全ての有限な存在者を元とする無限集合を考えているのであるから、無限に有る無限集合の中で最小のものを考えていると言ってよいだろう。この場合それは唯一である。有限な存在者は無限に有りうるが、無限な存在は唯一と考えることも出来るのである。

全体・部分　唯一は万物万化の全体であり、単一はそれぞれ全体の一部分です。多数の単一が互いに集まって

唯一をなすように、多数の部分は、互いに集まって全体をなします。[12]

一般にあるものがある集合の元であることとその部分集合であることとは一致しない。これは集合論の習熟においてかなりの人々が躓くところである。しかしながら次節の議論を先取りして言えば、ある集合の元であることが同時にその部分集合であることになる集合が存在する。そのような集合こそ順序数に他ならない。したがって有限の存在者を有限順序数、無限の存在を超限順序数と読み換えることが許されるならば、この清沢の命題は成立する。

完全・不完全　全体は完全であり、部分は不完全です。したがって無限は完全であり、有限は不完全です。[13]

無限論の祖である古代ギリシャのアリストテレスは、無限は不完全であり有限こそ完全であると考えていた。古代ギリシャ人にとって限界無きもの、形無きものは不完全だったのである。無限は神のまたの名であるから完全である他はないと考えるようになったのは、キリスト教受洗後の中世ヨーロッパ、たとえばアクィノのトマスを嚆矢とする。近代におけるヘーゲルの無限論はこのトマスの無限論を継承している。清沢もまた阿弥陀の意味である無限は完全である他はないと考えた。無限は完全であり、完成であり、完結であり、完備である。現代の数学的無限論もまた、無限を完全であると考える。次節に見るように「無限は完備である」。

清沢はこのような無限論の地平において自力の宗教と他力の宗教の差異を理解しようとした。しかしその理解に到達するためには『宗教哲学骸骨』から『他力門哲学骸骨』への飛躍が不可欠であった。『宗教哲学骸骨』において無限論は以下のように続く。

二項同体　無限と有限の二者は同体なのでしょうか、それとも異なったものなのでしょうか。もし二者が異な

ったものであるとすれば、無限の外に有限がなければなりません。しかしそれでは無限の意義に背反します。したがって無限の外に有限が存在することはできません。つまり無限と有限とは同一体でなければならないのです。

有限無数　有限と無限は同体ですが、一個の有限は無限と同体であることはできません。また、百万・千万の有限も無限と同体であることはできません。ただ、無数の有限が互いに寄り集まってはじめて無限と同一体であることができるだけです。したがって、有限は無数でなければならず、数学式を借りてそのことを表すと次のようになります。

a×∞＝∞（aは有限の記号、∞は無数、または無限の記号）[14]

後者の「有限無数」においては、全ての有限な存在者の無限集合として、無限な存在が正確に把握されている。しかし前者の「二項同体」においては、無限な存在は全体集合であるがゆえにその外部、その他者を持たないことがこれもまた正確に把握されているにも関わらず、そこから無限と有限の同一という全く誤った帰結を導出してしまっている。これはヘーゲルの影響を受けた清沢のいかにも陥り易そうな推論の誤りである。

有限は無限の否定である。無限は全体であるからその外部、その他者、したがってその否定を有さない。ゆえに有限は否定され無限と同一であることになる。何処かで聞いたことのある推論ではないか。そう、存在と無の同一を「弁証」した時の推論である。この推論は対立項の一方が全体なら常に成り立つ。部分は全体の否定である。ところが全体はその外部、その他者、その否定を有さない。それゆえ全体の否定は否定され全体と同一であることになる。これがヘーゲルの「弁証法」と呼ばれる推論の正体である。

「弁証法」の何処が誤っているのか。集合論はこの種の誤りを見抜くのに優れている。全体集合の否定は空集合、すなわち何ものも属さない集合である。したがって全体の否定、外部、他者は端的に無い、存在しないのである。それゆえたとえ無限であったとしても、それが全体集合として考えられているのであれば、その否定は有限ではない。その否定は空集合、端的に無、非存在なのである。

有限な存在者の否定は無限な存在それ自体ではない。無限な存在それ自体は全体集合であるから、このとき有限な存在者は空集合すなわち無であることになってしまう。有限な存在者の否定はその他者、無限な存在という全体集合から有限な存在者という有限部分集合を差し引いた残余、集合論で言う有限な存在者の補集合としての無限な他者なのである。清沢は『宗教哲学骸骨』執筆の段階ではこの有限な存在者の外部に無限な他者が存在する可能性について気付いてはいなかった。そのことが「二項同体」という誤った結論を導かせたとも考えられる。

しかし清沢は『宗教哲学骸骨』の三年後に執筆された『他力門哲学骸骨』において有限な存在者の外部に無限な他者が存在する可能性を明晰に意識するのである。

先ほど、有限は無限の外にあることはできず、有限と無限とはその体において同一であると主張しました。しかし、そこに根本的矛盾があるために、有限の外に無限があるという新しい主張が生じてくるのを見ることになります。つまり、有限と無限とは、その体において別であるという矛盾した説が成立するわけです。その論理というのは次の通りです。先ほどは無限を基準として立論しました。そして無限は限界を許さないものですから、その外に有限があって無限から区別されるということはありえないことでした。しかし、いま視点を転じて、有限を基準とすればどうでしょうか。有限の体というのは限界や区別があるものですから、限界や区別

の存在しない無限と同体であることはできません。したがって、もし無限というものが存在するとすれば、その体は有限の外に存在するとせざるをえません。この結論は先ほどの同体論に矛盾するものですが、しかし、その一方のみを重んじて、他方を軽んじたり、あるいは一方を棄ててしまったりするべきではありません。(15)

第一の命題は、無限には他者が無いのであるから、有限といえども無限にとって他者ではないというものであり、第二の命題は、有限には他者が有らざるをえず、無限こそ有限にとって他者であるというものである。いずれの命題も一見正しく聞こえる。しかし両者はこれまた一見矛盾している。これら二つの命題は第一の無限を全体としての無限、第二の無限をその部分としての無限と考えることによって始めて整合する。しかし部分としての無限という発想は、集合論なしにはおそらく生まれえない。何故なら集合論で考えない限り、部分としての無限は、限定された部分としての無限、すなわち限定された無限という形容矛盾としか聞こえて来ないからである。

集合論においては、無限の全体集合に対してその無限の部分集合、無限部分集合という概念を矛盾なく導入できる。これによって始めて清沢の二つの命題は矛盾なく理解されるのである。第一の命題は無限の全体集合の他者は空集合であり有限の存在者（有限部分集合）ではないということであり、第二の命題は有限の存在者（有限部分集合）の他者は無限の全体集合におけるその補集合としての無限部分集合であるということである。第一の命題においては有限の存在者（有限部分集合）は無限の存在（全体集合）の内部に有り、第二の命題においては有限の存在者（有限部分集合）は無限の他者（補集合）の外部に有ることになる。

清沢の一見矛盾する二つの命題は結果としていずれも真である。もっとも集合論を知らなかった清沢がこれら二つの命題の真であることを証明したとは言えない。清沢の言った二つの仮説が現代の集合論から見れば両者とも真

であったということに過ぎない。しかし一見矛盾する二つの命題のいずれも「一方を棄ててしまったりするべきではありません」と主張することは、両者が共に真であるという確かな推測なしには困難であっただろう。清沢はこの二つの命題を前提として自力の宗教と他力の宗教の差異に迫るのである。

前節で論じましたように、有限と無限との二者について、その体が同一であるという説と、異なっているという説、この二つの相反する説があるわけですが、そのために宗教において、自力門と他力門の二者が生じるに至ったのです。

その場合、有限と無限との体が一であると信じる人は、現に存在する有限なわれわれにもその内部に無限な性質ないし能力があると考えるわけですから、自分の力を奮い起こして、その潜在的な無限の能力を開発・発展しようとします。これが自力門の宗教です。

それに対して、有限の外に無限があると信じる人は、外にある無限のなかに無限で霊妙な働きを認めるわけですから、この霊妙な働きに身を投じ、その光明に照らされようとします。これが他力門の宗教です。[16]

有限と無限が一致する、これは誤りなので正しく言い直せば、有限が無限の内部に有ることを信じる宗教、それが自力の宗教であり、有限が無限の外部に有ることを信じる宗教、それが他力の宗教である。有限な存在者は無限な存在の内部に属し、無限な存在を分与されて存在するのであるから、自らが分与された存在を覚ろう、「開発しよう」とする、これが自力の宗教である。有限な存在者は無限な他者の外部に接し、無限な他者に臨在されて存在するのであるから、自らを臨在する他者にたのもう、「投じよう」とする。これが他力の宗教である。

この二つの無限と有限の関係による自力の宗教と他力の宗教の理解が、清沢宗教哲学の到達点である。これはこ

れまでに提出された宗教類型論の中で最も深く透明なものである。しかしこの類型論は、仏教の類型論としてはこれ以上望むべくもないとしても、キリスト教を含む世界宗教の類型論としては、唯一点、類型名称に問題が残る。自力と他力の対比は仏教の分類には相応しいが、キリスト教の分類には馴染まないのである。自力のキリスト教という類型は想像し難いが、しかしキリスト教は神を必ずしも他者とだけ考えるものではない。神を存在それ自体と考えるキリスト教、たとえばアクィノのトマスのキリスト教は、むしろキリスト教の主流である。

本論は清沢の宗教類型論を完全に継承しつつ、類型の名称だけを変更する。有限の存在者が無限の存在の内部に属し、無限な存在を分与されて存在することを信じる宗教を存在神論（Onto-theology, Theology of the Being）、有限の存在者が無限の他者の外部に接し、無限の他者に臨在されて存在することを信じる宗教を他者神論（Allo-theology, Theology of the Other）と呼ぶことにしたい。存在神論の典型は、神ご自身である存在の分与こそキリスト教の根本的な教義であるとするカトリック教会である。[17] 他者神論の典型は、臨在する他者である阿弥陀仏に帰依する浄土真宗である。世界と日本における宗教の分布を考慮に入れるならば、カトリック教会と浄土真宗を宗教の標本とすることに差し当たり致命的な欠陥はないと思われる。教皇や門主のいる宗教ばかりではないかというご批判はまた別の問題である。ただしカトリック・キリスト教の中に他者神論の要素が、あるいは浄土仏教の中に存在神論の要素がないと主張したいのではない。次節以降の議論で明らかにしたいことは、むしろ存在神論と他者神論の同一性である。

三　集合論

有限な存在者、無限な存在、無限な他者。役者は出揃った。この三者を数学的に表現しその相互関係を解析しよう。ここからが宗教の数理解析である。そのための方法が集合論に他ならない。集合論は有限と無限の関係及び無限相互の関係を解析する人類最初の方法である。以下では現代の集合論の成果を活用して宗教を解析する。しかしあくまで宗教学に必要かつ充分な範囲で議論を進めるため、集合論の数学的に微妙な部分の詰めがあるいは甘くなるかも知れない。数学的に厳密な議論に関心がある読者はたとえば倉田令二朗の『公理論的集合論』あるいは齋藤正彦の『数学の基礎――集合・数・位相』を参照して戴きたい。[18] 倉田の著書は日本における公理的集合論の始めての体系書であり、齋藤の著書はこれ以上考えられないほど透明に公理的集合論を叙述した教科書である。数学に魅せられる体験が出来るに違いない。

集合論はその上に全数学が構築されるという意味において最も根源的な数学である。したがってその対象も述語も最も根源的である。集合論の対象は集合のみ、述語は集合ｘが集合ａに属することを意味する∈のみである。すなわち、

$x \in a$

集合ａに属する集合ｘをａの元と呼ぶ。二つの集合ａ、ｂにおいてａの全ての元がｂに属するとき、ａはｂの部分集合であると呼び、$a \subset b$ と書く。すなわち、

$a \subset b \leftrightarrow \forall x[x \in a \rightarrow x \in b]$

ここに、∀は「任意の、全ての」、→は「ならば」、↔は「→かつ←」を表す論理記号である。

またａがｂの部分集合であり、かつｂがａの部分集合であるならば、ａとｂは等しいと呼び、$a=b$と書く。すなわち、

$$a=b \leftrightarrow a \subset b \wedge b \subset a \leftrightarrow \forall x[x \in a \leftrightarrow x \in b]$$

ここに、$\wedge$は「かつ」を表す論理記号である。

いかなる元も属さない集合が存在する。この集合を空集合と呼び、0と書く。すなわち、

$$\exists 0 \forall x[\neg x \in 0]$$

ここに、$\exists$は「ある、存在する」、$\neg$は「でない、否定する」を表す論理記号である。ｘが0に属することが否定されているのであるからｘは0に属さない。このことを$x \notin 0$と書く。

空集合の存在は公理である。無の存在は定理として証明される命題ではなく、公理として前提される命題なのである。集合論で最初にその存在を要請される集合が空集合、無であることは興味深い。

ある集合を元とする集合が存在する。集合ｘを元とする集合をｘの対集合と呼び、$\{x\}$と書く。空集合0は存在するのであるから、その対集合$\{0\}$が存在する。この集合を1と定義する。すなわち、$\{0\}=1$

ある集合に属する集合の元全ての集合が存在する。集合ａに属する集合の元全ての集合をａの和集合あるいは合併と呼び、$\cup a$と書く。すなわち、

$$\forall x[x \in \cup a \leftrightarrow \exists y[x \in y \wedge y \in a]]$$

たとえば二つの集合ｘ、ｙの対集合$a=\{x, y\}$を考えてみよう。このときａの和集合$\cup a$は、ｘの元かあるいはｙの元全ての集合である。これをｘとｙの和集合あるいは合併と呼び、

Ua=U{x,y}=x∪y

と書く。和あるいは合併の感じが出ているだろうか。

さて、集合1とその対集合{1}は存在するのであるから、それらの和集合1∪{1}が存在する。この集合を2と定義する。すなわち、1∪{1}=2

集合1の元は0、集合{1}の元は1なのであるから、和集合の定義により、

2={0,1}

このように定義される集合0、1、2、……を順序数と呼ぶ。

順序数αに対して、その対集合{α}との和集合α∪{α}が存在する。これを順序数αの直後の順序数と呼び、逆にαを順序数α∪{α}の直前の順序数と呼ぶ。

順序数2の元0、1が順序数であるように、任意の順序数の元は全て順序数である。

0を除く全ての元と自らが直前の順序数を持つような順序数、および0を有限順序数と呼ぶ。すなわち任意の有限順序数nは、

n={0,1,2,…,n−1}

と書ける。n−1はnの直前の順序数

n−1∪{n−1}=n

である。0を除く全ての元とn自らが直前の順序数を持つことは明らかであろう。

有限順序数は無限に存在する。何故なら任意の有限順序数nに対して常に直後の順序数n∪{n}が存在するから

である。したがって全ての有限順序数の集合、有限順序数の全体は無限集合である。

全ての有限順序数の集合である無限集合ωが存在する。すなわち、

$$\exists\omega[0\in\omega\wedge\forall n[n\in\omega\rightarrow n\cup\{n\}\in\omega]]$$

ωの中に、空集合0を始めとして、全ての有限順序数が無限に属している様子が見て取れよう。これは無限公理と呼ばれる集合論の最も根本的な公理である。無限集合、有限順序数の全体の存在は証明されるべき定理ではなく、前提されるべき公理なのである。

有限順序数の全体である無限集合ωは順序数である。ちなみにωは、

$$\omega=\{0,1,2,\cdots,n-1,n,n\cup\{n\},\cdots\}$$

と書ける。この最後の$\{\cdots\}$に無限に続くという意味が込められている。ωは明らかに有限順序数を無限に延長した順序数である。

しかしωは有限順序数ではない。ωに直前の順序数は存在するだろうか。直前の順序数を持たない順序数を極限順序数と呼ぶ。後に証明するようにωは極限順序数である。ωは全ての有限順序数を含む順序数であるが、しかし有限順序数とは異なる順序数なのである。以下このことを定理にまとめ証明しよう。

まず順序数の性質を確認する。順序数αが順序数βの元であり、βが順序数γの元であれば、αはγの元である。すなわち、

$$\alpha\in\beta\wedge\beta\in\gamma\rightarrow\alpha\in\gamma$$

これを順序数の推移性と呼ぶ。

順序数の推移性は色々と変形できる。たとえば部分集合の定義によれば、

$$\beta \in \gamma \rightarrow \beta \subset \gamma$$

となる。順序数βが順序数γの元であれば、βはγの部分集合である。

また和集合と部分集合の定義によれば、

$$\cup \gamma \subset \gamma$$

となる。順序数γの和集合はγの部分集合である。

次に順序数の大小関係を定義する。順序数αの部分集合をAとする。このときAの元aがAの全ての元を部分集合とするならば、aをAの最大元と呼び、maxAと書く。すなわち、

$$a = \max A \leftrightarrow \forall x \in A [x \subset a \wedge a \in A]$$

逆にAの元aがAの全ての元の部分集合となるならば、aをAの最小元と呼び、minAと書く。すなわち、

$$a = \min A \leftrightarrow \forall x \in A [a \subset x \wedge a \in A]$$

またαの元aがAの全ての元を部分集合とするならば、aをAの上界と呼ぶ。すなわち、

$$\forall x \in A [x \subset a \wedge a \in \alpha]$$

Aの上界の全体、これはαの部分集合である、が最小元aを持つならば、aをAの上限と呼び、supAと書く。

したがってsupAは、Aの全ての元を部分集合とすると同時に、Aの全ての元を部分集合とする全ての集合、すなわち全ての上界の部分集合となっている。

順序数の任意の部分集合に上限が存在するとき、順序数は完備(complete)であると呼ぶ。これはデデキントの

証明した実数の（順序）完備性の順序数への拡張である。デデキントの実数論は、自然数（有限順序数）の比である有理数の切断を実数（極限順序数）と見做しその完備性（completeness）を証明した、すなわち有理数を完備化（completion）することによって実数を構成した無限論の画期をなす業績である。現代の集合論はこれを一般化して、有限順序数を完備化することにより極限順序数さらには超限順序数を構成すると言うことも出来る。あるいは逆に現代の集合論は、超限順序数を構成することによって有限順序数を完備化すると言ってもよい。それではやって見よう。

完備性定理（Completeness Theorem）　**順序数は完備である。すなわち順序数の任意の部分集合をAとすれば、**

① 和集合$\cup A$は順序数である。

② $\cup A$はAの上限である。

③ Aが空集合でなく、$\cup A$がAの元でないならば、$\cup A$は極限順序数である。

④ 極限順序数は存在する。

証明　①$x \in \cup A$ならば、和集合の定義により$\exists y[x \in y \in A]$。yは順序数だからxも順序数。次に$y \in x \in \cup A$ならば、xは順序数だからyも順序数。$x \in \cup A$なので$\exists z[x \in z \in A]$。zは順序数だから推移性を持つので$y \in z$。$\cup A$の定義により$y \in \cup A$、したがって$\cup A$は推移性を持ち、順序数である。

②$\alpha \in A$とする。$\beta \in \alpha$ならば$\beta \in \cup A$だから、部分集合の定義により$\alpha \subset \cup A$、すなわち$\cup A$はAの上界である。もし$\cup A \in A$ならば$\cup A = \max A = \sup A$。$\cup A \notin A$とする。BがAの上界である、すなわち$\forall \alpha \in A[\alpha \subset B]$とする。$\beta \in \cup A$ならば、ある$\alpha \in A$に対して$\beta \in \alpha$。したがって$\beta \in B$であり、よって$\cup A \subset B$となる、すなわ

ち$\bigcup A = \sup A$。

③$\bigcup A$の直前の順序数πが存在したとする。もし$\forall \alpha \in A[\alpha \subset \pi]$ならば、$\pi$はAの上界であるが、$\neg \bigcup A \subset \pi$であるから、$\bigcup A$がAの上限であることに反する。したがって$\exists \alpha \in A[\neg \alpha \subset \pi]$。$\bigcup A$はAの上限なので$\alpha \subset \bigcup A$。順序数とその直前の順序数の間に順序数は存在しないので$\alpha = \bigcup A \in A$。これは仮定に反する。

④無限公理によって存在する全ての有限順序数の集合ωの上限$\bigcup \omega$は極限順序数である。もし$\bigcup \omega = \max \omega$ならば、$\bigcup \omega \in \omega$であるから、無限公理により$\bigcup \omega \cup \{\bigcup \omega\} \in \omega$。これは$\bigcup \omega$が$\omega$の上限であることに反する。したがって$\bigcup \omega \notin \omega$。定理③により$\bigcup \omega$は極限順序数である。証明終。[19]

直前の順序数を持たない順序数、極限順序数が存在する。それは差し当たり有限順序数の全体である無限集合ωの上限$\bigcup \omega$として与えられる。完備性定理③によれば$\bigcup \omega$はωの元ではない。二つの順序数は一方が他方の元であるかあるいは等しいかのいずれかであるので、$\omega \in \bigcup \omega$であるかあるいは$\omega = \bigcup \omega$である。ところが順序数の推移性によれば$\omega \in \bigcup \omega \rightarrow \omega \subset \bigcup \omega$であり、かつ$\bigcup \omega \subset \omega$である。したがって$\omega = \bigcup \omega$である他はない。すなわち全ての有限順序数の集合$\omega$とその上限である極限順序数$\bigcup \omega$は等しい。全ての有限順序数の集合$\omega$は、自らが自らの上限でありかつ有限順序数ではない極限順序数なのである。

$$\omega = \sup \omega \notin \omega$$

有限順序数でない順序数を超限順序数と呼ぶ。極限順序数ωは最小の超限順序数と考えてよい。したがってωは、全ての有限順序数を自らの内部に含み、自らが自らのすなわち全ての有限順序数の上限であると共に、極限順序数として直前の有限順序数から無限に隔絶し、超限順序数として有限順序数を超越する。次節ではこのωを神と

呼ぶことになるだろう。「神である主がこう言われる。「わたしはαであり、ωである。」」（ヨハネの黙示録第一章第八節）

仏の数学をやり残している。超限順序数ωにおいて有限順序数nの元ではない順序数の集合をωにおけるnの補集合と呼び、$\omega-n$と書く。すなわち、

$$\forall x[x \in \omega - n \leftrightarrow x \in \omega \wedge x \notin n]$$

この補集合を外延的に書けば、

$$\omega - n = \{n, n \cup \{n\}, \cdots\}$$

となる。$\{\cdots\}$は無限に後続するという気持ちを表している。

$\omega-n$は無限集合ωから有限部分集合nを差し引いた残余であるから、それ自体はωの無限部分集合である。カントルは無限集合とその無限部分集合の間に驚くべき関係が存在することを証明した。任意の無限集合は自らと等濃（equipotent）な無限部分集合を有するという定理である。ここに集合の等濃とは、二つの集合A、BにおいてAの任意の元に対してBの元がただ一つ対応し、かつ逆にBの任意の元に対してAの元がただ一つ対応する、簡単に言えば、二つの集合の元が一対一に対応することを意味する。二つの集合が等濃であるとき、二つの集合の全ての元が一対一に対応するのであるから、両集合は同等であると考えられる。有限の世界、有限集合においてその全体と部分が同等であることは決してありえない。しかし無限においては、カントルが証明したように、全体と部分が同等でありうるのである。

本論では、超限順序数ωと有限順序数nの無限補集合$\omega-n$との等濃性（equipotency）を定理として掲げ、その

場合についての証明を付けておこう。

等濃性定理 (Equipotency Theorem) **超限順序数ωと有限順序数nの無限補集合ω－nは等濃である。**

証明　$\omega=\{0, 1, 2, \ldots, n-1, n, n\cup\{n\}, \ldots\}$と$\omega-n=\{n, n\cup\{n\}, \ldots\}$の間には、ωの任意の元mとω－nの元nのm番目の直後の順序数との一対一対応が存在する。証明終。[20]

四　完備性と等濃性

有限な存在者、無限な存在、無限な他者、宗教を語るときに不可欠な三者であった。この有限な存在者を有限順序数n、無限な存在を超限順序数ω、無限な他者をωにおけるnの無限補集合ω－nと表現して見よう。宗教的な概念の数学的な表現である。こうした表現の妥当性は、そうした表現のもたらす帰結によって判断されるべきである。すなわち有限な存在者をn、無限な存在をω、無限な他者をω－nと表現することによって導かれる論理的な帰結が、有限な存在者と無限な存在との関係あるいは無限な存在と無限な他者との関係にどのような新しい理解をもたらすかによって、宗教の数学的な表現の妥当性は判断されるべきなのである。

しかしこのことは同時に、有限順序数や超限順序数あるいは無限補集合といった集合論の概念、数学の概念を宗教の言葉によって解釈する作業でもある。宗教の数学的な表現の帰結を評価するということは、順序数の完備性や超限順序数と有限順序数の無限補集合との等濃性といった数学の定理を宗教の言説として解釈する行為なのである。したがって宗教の数学的な解析、宗教解析とは、同時に解析の宗教的な解釈、メタ解析であるとも言いうる。

それでは前節において導かれた二つの定理を宗教的に解釈して見よう。

完備性定理は、有限な存在者の全体である無限な存在が完備であることを主張する。すなわち有限な存在者の全体であり無限な存在である神は完備である。

定理②は、有限な存在者の全体である無限な存在の上限、限界（bound）が無限な存在それ自体であることを主張する。有限な存在者は可能的には無限に存在するのであって、われわれ有限な存在者の苦悩や不安は、自らが有限であるそのこと自体よりも、むしろ無限の可能性が存在する中で有限であらざるをえないことに起因すると考えられる。しかしわれわれの無限の可能性に上限、限界が存在する、しかもその上限、限界が無限な存在である神ご自身であることが与えられるならば、われわれ存在者の可能性は完結し、完成し、完備化する。われわれ存在者の存在は神ご自身によって完結し、完成し、完備化するのである。完備な存在の中で始めてわれわれは有限な生を悠々と全うすることが出来るであろう。

あるいはこう解釈してもよい。無限な存在の限界は無限な存在それ自体である。すなわち無限な存在、存在の全体である神は自らを限界付ける。われわれ有限な存在者は存在の全体でありかつ限界である神の内部にその存在を分与されて生きている。死とは分与された存在がもとの存在の全体に限定を解き放たれて回帰することである。存在の海、神はその海の全体であり限界である。われわれはやがてその海に帰る一塊の水である。

定理③は、無限な存在が有限な存在者を直前に持たない、有限な存在者から無限に隔絶していることを主張する。神はわれわれ存在者の上限である。しかしその上限にわれわれ存在者は決して到達しえない。何故ならわれわれ存在者はついに神の直前には立ちえないからである。われわれ存在者は神の内部に存在するにも関わらず、神を見ることは出来ない。ましてや神と一つになることなどありえない。存在神論は決して神秘主義ではありえないの

である。

定理④は、無限な存在が存在することは公理であると主張する。すなわち神の存在は、証明されるべき定理ではなく、前提されるべき公理である。それゆえ神の存在は、知りえる筈もなく、信じる他はありえないのである。

等濃性定理は、無限な存在と無限な他者が等濃であることを主張する。すなわち無限な存在、無限の全体である神と無限な他者、無限の部分である仏は等濃、同等である。全ての存在者を自らの内部に包み込み生かす神と、全ての存在者をそれぞれの傍らに寄り添って救い取る仏は、全く異なるように見えるが、実は同じなのである。存在神論と他者神論は、宗教の二大類型と見做される程鋭く対立しているが、集合論から見れば同等である。宗教の数学的解析が、対立する宗教間の対話に新たな地平を切り開く場面があるいはあるのかも知れない。

注

（1）落合仁司「宗教の数理解析」（『宗教研究』三四六号、二〇〇五年）、一―二三頁。

（2）大谷大学『清沢満之全集（全九巻）』岩波書店、二〇〇二―二〇〇三年。藤田正勝・安富信哉『清沢満之――その人と思想』法藏館、二〇〇二年。末木文美士『明治思想家論　近代日本の思想・再考Ⅰ』トランスビュー、二〇〇四年。

（3）清沢満之（藤田正勝訳）『他力門哲学骸骨』法藏館、二〇〇三年、二三―二四頁。

（4）落合仁司「宗教の数理解析」、七―一四頁。

（5）倉田令二朗・篠田寿一『公理論的集合論』河合文化教育研究所、一九九六年、四頁。

（6）ヘーゲル（武市健人訳）『大論理学（上巻の一）』岩波書店、二〇〇二年、七七―一八八頁。落合仁司「宗教の数理解析」、一―七頁。

（7）藤田正勝『京都学派の哲学』昭和堂、二〇〇一年、三一七―三二三頁。

（8）清沢満之（藤田正勝訳）『宗教哲学骸骨』法藏館、二〇〇二年、一八頁。

(9) 同右、一八―一九頁。
(10) 同右、一九頁。
(11) 同右、一九頁。
(12) 同右、一九頁。
(13) 同右、一九頁。
(14) 同右、二〇頁。
(15) 清沢満之（藤田正勝訳）『他力門哲学骸骨』、二一―二二頁。
(16) 同右、二三―二四頁。
(17) カール・ラーナー（百瀬文晃訳）『キリスト教とは何か――現代カトリック神学基礎論』エンデルレ書店、一九八一年、一五四―一八三頁。
キリスト教の神を他者とのみ捉えるのは、カール・バルトに代表される二〇世紀プロテスタント神学の特徴であるが、キリスト教全体の歴史から見れば一つのエピソードに過ぎない。たとえば田川建三『キリスト教思想への招待』勁草書房、二〇〇四年、二八―三九頁。
(18) 倉田令二朗・篠田寿一『公理論的集合論』、六―四九頁。齋藤正彦『数学の基礎――集合・数・位相』東京大学出版会、二〇〇二年、一八九―二四四頁。
(19) 同右、二一六―二一八頁の定理と証明を本論の文脈に合わせて読み直した。
(20) 落合仁司「宗教の数理解析」一六―一七頁に一般化された定理と証明がある。